1

Etudier la mécanique

1.1 Introduction

Le cours ex-cathedra est constitué de quatorze leçons hebdomadaires de trois heures qui seront consacrées à développer la théorie de la mécanique et d'une heure dédiée aux applications de cette théorie. La théorie sera bien sûr vérifiée par de belles expériences préparées avec soin par les préparateurs de cours des auditoires de physique. Les cours seront divisés en trois sections d'environ une heure chacune.

Pour mieux comprendre les notions théoriques vues au cours et savoir les appliquer dans des cas concrets auxquels vous serez confrontés dans votre future carrière d'ingénieur, vous aurez des sessions hebdomadaires de tutorat durant lesquelles vous aurez une série d'exercices à résoudre. Toutes les informations utiles concernant ce cours sont disponibles sur le ***site moodle*** de ce cours.

1.1.1 Histoire

La racine grecque du mot mécanique est $\mu\eta\xi\alpha\nu\iota\kappa\eta$, c'est-à-dire *michanikí*, qui signifie *relatif aux machines*. L'origine du mot mécanique a donc une signification utilitaire. Il s'agit de développer une science qui permet de faire fonctionner des machines. En termes plus modernes, la mécanique est la branche de la physique qui étudie l'équilibre des systèmes physiques, c'est-à-dire la statique, leur mouvement, c'est-à-dire la dynamique, et leur déformation.

Lorsqu'on aborde l'étude de la mécanique, on se pose naturellement deux questions fondamentales. La première est : "*Qu'est-ce que la mécanique ?*" et la seconde est : "*Pourquoi est-ce qu'on commence l'étude de la physique par la mécanique ?*" Il y a deux réponses à cela. La première est historique et la seconde est méthodologique et pédagogique.

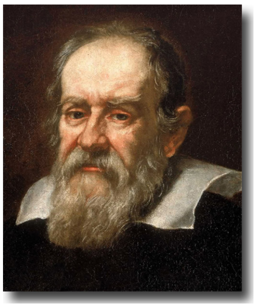
La raison historique est que la mécanique a permis à la science moderne de naître. Les premières lois physiques qui ont pu être découvertes sont les lois de Newton. En ayant bien compris les lois de mécanique, les physiciens des siècles passés ont ensuite peu à peu découvert les autres lois physiques. La mécanique est en somme le fondement de la physique.

La raison pédagogique est que la mécanique est la branche de la physique qui est la plus intuitive et la plus facile à modéliser mathématiquement. La mécanique décrit des expériences qui font partie de la vie de tous les jours, comme une chute sur un plan incliné, des ressorts, des pendules ou des montres mécaniques. La mécanique introduit des lois de cause à effet qui permettent de décrire mathématiquement l'évolution d'un système physique simple. Elle permet donc de se familiariser avec l'emploi des mathématiques comme langage universel de l'ingénieur. Elle répond donc à l'objectif principal de ce cours de mécanique qui est de savoir mettre sous forme mathématique un phénomène physique.

Aristote

Le but de cette introduction à la mécanique est de vous montrer pourquoi la mécanique est importante pour votre formation. Pour ce faire, je vous propose une perspective historique qui met en évidence le rôle de la mécanique dans le développement des sciences modernes.

Commençons en examinant les conclusions d'Aristote. Aristote a été le disciple de Platon pendant 20 ans. Fortement inspiré sur le plan philosophique par son maître, Aristote a conclu, dans son livre *De la Physique*, qu'il fallait distinguer le monde terrestre corrompu du monde céleste parfait. Le mouvement des corps célestes est un cercle parfait alors que le mouvement des corps terrestres est capricieux. Selon Aristote, les lois physiques qui régissent le mouvement des corps terrestres et célestes sont de nature différente. Elles sont irréconciliables. Le défaut de la méthodologie d'Aristote réside dans le fait qu'elle n'est pas vraiment scientifique. La méthodologie scientifique nécessite une interaction entre la théorie et l'expérience. Aristote n'a pas essayé d'interroger la nature, il lui a imposé ses présupposés philosophiques... Il a développé sa théorie dans sa tour d'ivoire et ne l'a pas proprement confrontée à l'expérience. Il a fallu attendre presque deux millénaires pour que ce paradigme aristotélicien soit remis en cause.

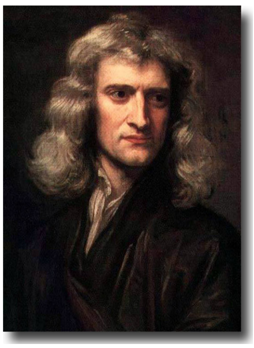


Galileo Galilei

Le nouveau paradigme a commencé à émerger au XVI^{e} siècle grâce notamment aux travaux de Galileo Galilei dit Galilée. Galilée est un des pionniers de l'expérimentation scientifique de la nature. En faisant interagir l'expérience et la théorie, Galilée permet à la science moderne de naître. Il fallait un langage pour interroger la Nature et ce langage, c'est celui des mathématiques. Par ses observations, il conclut que le mouvement rectiligne uniforme d'un corps est son mouvement *naturel*. Toute déviation de cette uniformité est attribuée à une *force*. Ceci est a été qualifié de principe d'inertie. Galilée définit également le mouvement rectiligne uniformément accéléré. Pour lui, cette définition est utile, parce qu'elle représente un mouvement qui s'observe dans la nature : la chute des corps. Il démontre expérimentalement que le mouvement de chute libre est bien un mouvement uniformément accéléré. Galilée a également prédit que dans le vide, une plume tomberait à la même vitesse qu'une masse de plomb. Cette expérience a été réalisée après sa mort par son disciple Torricelli et le résultat a été concluant. Lors de la mission spatiale Apollo 15, cette expérience a été effectuée avec une plume et un marteau devant des millions de téléspectateurs. Galilée est le père de la cinématique et le grand-père de la dynamique. Sans lui, Newton n'aurait probablement pas pu découvrir les lois de la dynamique.

Johannes Kepler

Un autre personnage important dans le développement de la science est Johannes Kepler. Kepler s'est autant intéressé à l'astronomie qu'à l'astrologie. En se basant sur les observations précises de Tycho Brahé sur les orbites planétaires, Kepler a déduit trois lois mathématiques régissant la mécanique céleste, c'est-à-dire le mouvement des planètes autour du soleil. La première loi est la loi des orbites. Elle stipule que les planètes du système solaire se déplacent selon des orbites elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers. La deuxième loi est la loi des aires. Elle stipule que l'aire balayée par unité de temps par le mouvement de la planète autour du soleil est une constante. La troisième loi est la loi des périodes. Elle stipule que le rapport de la période de rotation au carré divisé par le demi-grand axe de l'ellipse au cube est une constante. Ces lois de la mécanique céleste de Kepler sont un exemple absolument remarquable de modélisation mathématique à partir de données expérimentales. Elles ont joué un rôle central dans la découverte de la loi de la gravitation universelle par Newton.



Isaac Newton

Isaac Newton est probablement le plus grand physicien de tout les temps. Newton a fait des études de mathématiques au *Trinity College* à Cambridge. A l'aide du principe d'inertie de Galilée et des lois de Kepler, Newton découvre les lois de la mécanique et les expose dans son célèbre livre *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, c'est-à-dire *les principes mathématiques de la philosophie naturelle*. Pour énoncer ces lois, il pose les bases du calcul différentiel et intégral. Newton est un génie sans égal tant sur le plan mathématique que sur le plan physique ! Grâce à Newton, la mécanique est devenue une théorie physique clairement exprimée dans le langage des mathématiques. De plus, le calcul différentiel et intégral de Newton permet de faire des prédictions en déterminant les solutions mathématiques de la théorie physique de Newton. Si un jour vous vous rendez à Cambridge, je vous recommande de visiter la *Wren Library* où vous trouverez un exemplaire original des *Principia Mathematica* avec une boucle de cheveux dorés de Newton. Vous pourrez ensuite voir sa statue dans la chapelle du College. Pour l'anecdote, le meilleur étudiant de première année en mathématiques du *Trinity College* à Cambridge a le privilège de choisir sa chambre d'étudiant pour la deuxième année de ses études. La tradition veut qu'il choisisse la chambre où Newton a lui-même fait ses études, qui surplombe le pommier qui selon la légende a fortement inspiré le jeune Isaac.

1.1.2 Objectifs

Le principal objectif dans l'apprentissage de la mécanique, c'est d'apprendre à décrire un phénomène physique en utilisant le langage des mathématiques. L'analyse d'un phénomène physique commence par une modélisation d'un système physique sur le plan conceptuel. Cette modélisation doit être formalisée de manière claire. Pour ce faire, on utilise le langage universel des mathématiques. On transcrit donc le modèle du phénomène physique sous forme mathématique. On applique alors les lois physiques et on aboutit à un système d'équations différentielles qui régissent l'évolution dans le temps du système étudié.

Il est essentiel d'apprendre à reconnaître les limites d'applicabilité des modèles et des théories physiques qu'on utilise. Par exemple, on commencera notre étude de la mécanique avec le modèle du point matériel et on se posera la question de savoir dans quelle mesure on peut se contenter de ce modèle. Un cours de mécanique n'est pas un cours qui exige de mémoriser un grand nombre de lois ou d'équations. C'est un savoir-faire qu'on développe progressivement en essayant de modéliser mathématiquement toute une série d'expériences physiques choisies, comme la collision d'une balle de fusil sur une cible ou la destruction d'un verre par résonance acoustique (Fig. 1.1).

FIGURE 1.1 Lorsque la cible est en verre, la balle de fusil conserve sa quantité de mouvement. Lorsque la cible est en bois, la balle de fusil transmet sa quantité de mouvement à la cible. Lorsque le verre est excité acoustiquement à l'aide d'un haut-parleur à sa fréquence de résonance, il est d'abord déformé puis, il se casse.

Sur le plan pratique, c'est d'abord en résolvant des problèmes concrets qu'on apprend vraiment la mécanique. Je vous encourage donc vivement de participer à toutes les sessions d'exercices et d'essayer, autant que possible, de résoudre les exercices par vous-même. On vous apprend aussi à adopter une démarche systématique. Il ne s'agit pas de repérer l'astuce subtile qui permet d'obtenir le bon résultat le plus efficacement. Non ! Il s'agit d'appliquer systématiquement l'approche *tout-terrain* qu'on va élaborer dans ce cours.

Dans un cours de mécanique, on apprend à utiliser des outils mathématiques en dehors du contexte mathématique dans lequel ils sont normalement enseignés. On verra que cela n'est pas toujours évident. Il arrive souvent qu'un enseignant de physique utilise un outil mathématique qui n'a pas encore été vu formellement par ses étudiants dans le cadre d'un cours de mathématiques. Quand cela m'arrivera, j'introduirai proprement l'outil mathématique en question. Ce sera pour vous l'occasion d'être sensibilisé à l'importance de cet outil mathématique et d'être motivé quand le sujet surviendra dans un cours de mathématiques. Vous pourrez ainsi découvrir les mathématiques de manière ludique par la physique.

1.1.3 Limites

Etudier la mécanique, c'est s'inscrire dans une longue tradition scientifique. La mécanique de Newton a triomphé durant trois siècles, mais à la fin du XIX^e siècle, son universalité a été remise en cause. Son domaine d'applicabilité est toujours encore très important, mais il n'est pas universel.

L'immense succès de la mécanique de Newton a laissé penser aux physiciens que toute réalité physique pouvait être expliquée de manière déterministe. Ce déterminisme triomphant est bien illustré par le Marquis Simon de Laplace qui aurait affirmé à l'empereur Napoléon Bonaparte : "*Donnez-moi les conditions initiales et je vous prédirai l'évolution du* *monde*". Laplace était convaincu qu'un jour on disposerait d'une équation qui puisse prédire entièrement l'évolution du monde à partir des conditions initiales.

Jules Henri Poincaré

A la fin du XIX^e siècle, Henri Poincaré a montré que les équations différentielles décrivant des systèmes physiques très simples peuvent avoir des solutions très complexes. Il faudra attendre 1960 pour que ces idées se popularisent notamment par Edward Lorenz et David Ruelle sous le nom de théorie du chaos. Deux pendules articulés ou une balle de ping-pong mise en mouvement par un vibreur régulier peuvent avoir un mouvement chaotique (Fig. 1.2).

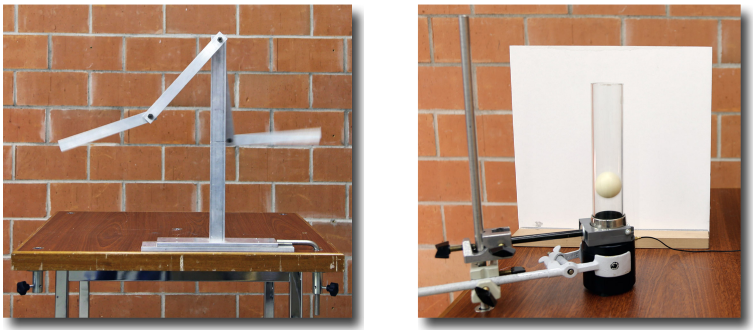


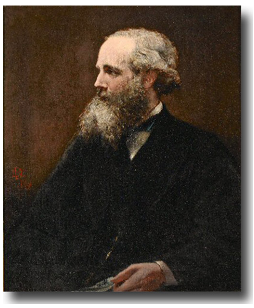
FIGURE 1.2 Si les deux pendules articulés sont lancés avec de faibles amplitudes initiales comparables, leurs mouvements restent synchronisés. A grandes amplitudes initiales comparables, leurs mouvements se désynchronisent très rapidement. Une balle de ping-pong rebondit sur une plateforme astreinte à un mouvement périodique bien déterminé. Lorsque le tube est ouvert, la fréquence des rebonds est aléatoire. Avec le frottement imposé par le bouchon, le mouvement devient périodique.

Le début du XX^e siècle est le témoin de deux révolutions physiques qui vont définitivement remettre en cause l'universalité de la mécanique newtonienne. La relativité restreinte, développée par Hendrik Antoon Lorentz et Jules Henri Poincaré et finalisée par Albert Einstein, montre que pour des vitesses suffisamment proches de la vitesse de la lumière, la mécanique newtonienne n'est plus valable. Elle doit être remplacée par la mécanique relativiste. Vingt ans plus tard, Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg et Paul Dirac montrent qu'à petite échelle la mécanique newtonienne doit être remplacée par la mécanique quantique.

1.1.4 Expériences

Les expériences ont une importance historique. Depuis Galilée, la physique s'enseigne en démontrant expérimentalement les phénomènes qu'on veut décrire par des lois.

Les expériences ont aussi une importance symbolique. Les démonstrations d'auditoire nous rappellent que la physique ne peut pas se construire ex-nihilo. La méthodologie scientifique consiste en une démarche hypothético-déductive. On fait des hypothèses que l'on vérifie ensuite expérimentalement. Il ne faut jamais oublier que toute théorie physique se construit par une confrontation à l'observation des phénomènes naturels ! Sinon, vous feriez mieux d'aller suivre le cours de mathématiques ou le cas échéant celui de philosophie... A ce propos, il est pertinent de citer la mise en garde de James Clerk Maxwell, le physicien qui a unifié les phénomènes électriques et magnétiques : "*Je n'ai pas de raison de penser que l'intelligence humaine est capable de conceptualiser les lois physiques en se basant uniquement sur ses propres ressources sans faire appel aux résultats expérimentaux. De telles tentatives se sont toujours soldées par des théories artificielles et pleines de contradictions.*"



James Clerk Maxwell

Finalement, les expériences ont une importance méthodologique. En observant une expérience, on réalise mieux que la mécanique consiste en modèles simples, et parfois trop simplistes, qui idéalisent une réalité matérielle complexe. L'observation des expériences vous encourage à repérer ces phénomènes démontrés au cours dans la vie quotidienne, ce qui constitue un excellent entrainement à la curiosité scientifique.

1.1.5 Livre

Ce cours est basé sur le livre de *Mécanique* du Professeur Jean-Philippe Ansermet publié aux Presses polytechniques et universitaires romandes (2e édition largement remaniée en 2013). Les références à ce livre sont données au début de chaque section. Je vous recommande donc vivement de vous en procurer une copie.

Mécanique (parties 1, 2, 3)

1.1.6 MOOC

L'acronyme MOOC désigne en anglais un *Massive Open Online Course*. En français, l'acronyme est CMELL et désigne un *Cours Massif en Ligne Libre*. Ces cours sont en accès libres dans le monde entier et des milliers d'étudiants les suivent. Les deux plus grandes plateformes de MOOC sont Coursera, géré par une start-up de Stanford, et EdX, géré par une start-up du MIT. Le Professur Ansermet, qui a été le directeur de la section de physique et qui a enseigné la mécanique pendant plus de vingt ans à l'EPFL a lancé un MOOC de mécanique en français sur Coursera. Ce cours couvre l'équivalent du programme de mécanique de la section de physique, c'est-à-dire un cours de quatre heures par semaine durant un semestre. Le cours que je vous donne a une structure proche de celle du MOOC, mais certains sujets avancés comme la relativité et la mécanique analytique ne seront pas abordés dans ce cours. C'est la raison pour laquelle, je vous encourage donc de vous inscrire sur Coursera et de suivre le MOOC.

MOOC

1.2 Calcul différentiel

La dérivation permet de déterminer le taux de variation d'une fonction lorsqu'on varie la variable dont elle dépend. On appelle ***dérivée*** la limite infinitésimale du rapport de la variation de la fonction et de la variation de la variable correspondante.

1.2.1 Dérivées d'une fonction

Dans le contexte de la mécanique, on cherche le plus souvent à déterminer l'évolution temporelle d'un système. On considère donc ici des fonctions du temps t qu'on suppose être un paramètre réel continu, c'est-à-dire $t \in \mathbb{R}$. A titre d'exemple, on choisit comme fonction du temps t la coordonnée de position $x(t)$ le long d'un axe fixe. On suppose que la coordonnée de position est une fonction continue et deux fois dérivable, c'est-à-dire $x(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. La vitesse scalaire $v(t)$ le long de l'axe de coordonnée est définie comme la dérivée de la coordonnée de position $x(t)$ par rapport au temps t. Elle s'écrit explicitement comme,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{1.1}$$

Les physiciens utilisent la lettre d pour représenter la limite infinitésimale d'une variation Δ. L'expression (1.1) de la vitesse $v \equiv v(t)$ peut donc être écrite comme,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} \qquad \text{ainsi} \qquad dx = v\,dt \tag{1.2}$$

Géométriquement, la dérivée $v(t)$ représente la pente de la tangente à la fonction $x(t)$ au temps t (Fig. 1.3).

En effet, dans la limite d'une variation infinitésimale, l'intervalle de temps Δt se réduit à l'intervalle de temps infinitésimal dt et la variation de coordonnée Δx se réduit à la variation infinitésimale de position dx. Compte tenu de l'équation (1.2), on a montré que $dx = v\,dt$, ce qui implique que la vitesse scalaire v est bien la pente de la dérivée de la coordonnée de position x.

L'accélération scalaire $a(t)$ le long de l'axe de coordonnée est définie comme la dérivée de la vitesse scalaire $v(t)$ par rapport au temps t qui s'écrit explicitement comme,

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \tag{1.3}$$

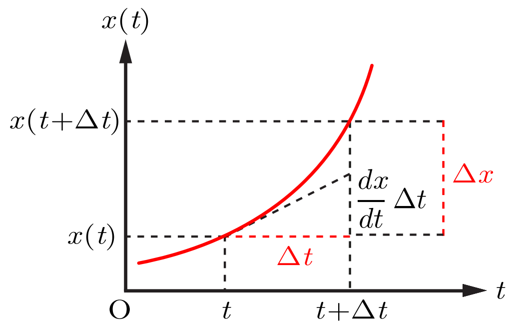


FIGURE 1.3 La vitesse scalaire $v\,(t)$ est la pente de la tangente à la fonction coordonnée de position $x\,(t)$ au temps t.

En notation de physicien, l'accélération scalaire $a \equiv a\,(t)$ s'écrit comme,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v\,(t+dt) - v\,(t)}{dt} \qquad \text{ainsi} \qquad dv = a\,dt \tag{1.4}$$

L'accélération scalaire $a\,(t)$ est donc la dérivée seconde de la coordonnée de position $x\,(t)$. En substituant l'expression (1.1) de la vitesse dans celle de l'accélération (1.3), on obtient,

$$a\,(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\left(\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x\,(t)}{\Delta t}\right)}{\Delta t} = \frac{d\left(\dfrac{dx\,(t)}{dt}\right)}{dt} \tag{1.5}$$

En notation de physicien, l'accélération scalaire $a \equiv a\,(t)$ s'écrit explicitement comme,

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 x = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{1.6}$$

Pour les dérivées d'une fonction par rapport au temps t, et uniquement par rapport au temps, les physiciens utilisent une notation abrégée qui consiste à remplacer la fraction par un point. Compte tenu des expressions (1.2), (1.4) et (1.6), en notation abrégée la vitesse scalaire s'écrit,

$$v = \dot{x} \tag{1.7}$$

et l'accélération scalaire s'écrit,

$$a = \dot{v} = \ddot{x} \tag{1.8}$$

1.2.2 Dérivée d'une composition de fonctions

En mécanique on est souvent confronté à des compositions de fonctions du temps dont on doit déterminer la dérivée par rapport au temps. On considère à présent le cas où la fonction $h\,(t)$ est une composition de fonctions qui est définie comme la composition d'une fonction $f\,(g)$ et d'une fonction $g\,(t)$, c'est-à-dire

$$h\,(t) \equiv (f \circ g)\,(t) = f\,(g\,(t)) \tag{1.9}$$

La dérivée de la fonction $g\,(t)$ par rapport au temps s'écrit,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g\,(t+dt) - g\,(t)}{dt} \qquad \text{ainsi} \qquad g\,(t+dt) = g\,(t) + dg \tag{1.10}$$

De manière similaire, la dérivée de la composition de fonctions $f\,(g)$ par rapport à la fonction g s'écrit,

$$\frac{df}{dg} = \frac{f\,(g+dg) - f\,(g)}{dg} \qquad \text{ainsi} \qquad f\,(g+dg) = f\,(g) + df = f\,(g) + \frac{df}{dg}\,dg \tag{1.11}$$

Compte tenu des expressions (1.10) et (1.11), la dérivée de la composition de fonctions $x\,(t)$ par rapport au temps s'écrit,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{f\,(g\,(t+dt)) - \,f\,(g\,(t))}{dt} = \frac{f\,(g\,(t)+dg) - \,f\,(g\,(t))}{dt} = \frac{\cancel{f\,(g\,(t))} + \dfrac{df}{dg}\,dg - \cancel{f\,(g\,(t))}}{dt} \tag{1.12}$$

Par conséquent, la dérivée de la composition de fonctions $h\,(t)$ par rapport au temps t nous donne la règle de la dérivation en chaîne de la composition de fonctions $f\,(g\,(t))$ par rapport au temps t,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d\,(f \circ g)}{dt} = \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dt} \tag{1.13}$$

A présent, on va considérer deux applications physiques de cette dérivation d'une composition de fonctions. La première est un oscillateur harmonique à une dimension dont la coordonnée de position est définie comme,

$$x\,(t) = A\cos\,(\omega t + \varphi) \tag{1.14}$$

où A est l'amplitude d'oscillation, ω est la pulsation et φ est l'angle de déphasage. Les grandeurs A, ω et φ sont des constantes. En appliquant la règle de dérivation (1.13) on obtient la vitesse d'oscillation,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\,(A\cos\,(\omega t + \varphi))}{d\,(\omega t + \varphi)}\,\frac{d\,(\omega t + \varphi)}{dt} = -\,A\,\omega\sin\,(\omega t + \varphi) \tag{1.15}$$

La seconde est l'énergie cinétique d'un objet de masse m constante en translation le long de l'axe de coordonnée $x\,(t)$,

$$T\,(t) = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 \tag{1.16}$$

En appliquant la règle de dérivation (1.13) on obtient la puissance mécanique appliquée sur l'objet,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{1}{2}\,m\dot{x}^2\right)}{d\dot{x}}\,\frac{d\dot{x}}{dt} = \underbrace{m\dot{x}}_{\text{force}}\,\underbrace{\ddot{x}}_{\text{vitesse}} \tag{1.17}$$

Brook Taylor

1.2.3 Développement limité d'une fonction

Le ***développement limité*** d'une fonction, aussi appelé le ***développement de Taylor*** d'une fonction en référence au mathématicien Brook Taylor, est une approximation de l'expression d'une fonction dans le voisinage d'une valeur fixée de la variable.

Compte tenu des équations (1.1) et (1.2), la dérivée de la fonction $f\,(x)$ par rapport à la variable x s'écrit,

$$\frac{df}{dx} = \frac{f\,(x+dx) - f\,(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x+\Delta x) - f\,(x)}{\Delta x} \tag{1.18}$$

Ainsi, la fonction $f\,(x+dx)$ évaluée à l'instant $x + dx$ s'exprime en terme de la fonction $f\,(x)$ évaluée à l'instant x comme,

$$f\,(x+dx) = f\,(x) + \frac{df}{dx}\,dx \tag{1.19}$$

Dans cette expression, il n'y a pas d'approximation puisque l'intervalle dx est infinitésimal. On désire trouver une expression analogue lorsque l'intervalle Δx n'est pas infinitésimal. Dans le cas où l'intervalle Δx n'est pas infinitésimal mais suffisamment petit, c'est-à-dire $\Delta x \ll x$, on peut faire l'approximation suivante pour la dérivée,

$$\frac{df}{dx} \simeq \frac{f\,(x+\Delta x) - \,f\,(x)}{\Delta x} \tag{1.20}$$

Dans ce cas, la relation (1.20) multipliée par Δx nous conduit à l'approximation suivante,

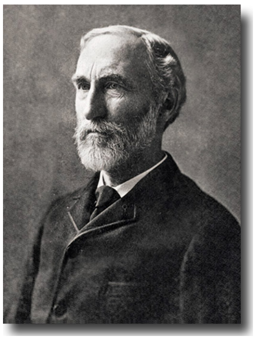
$$f\,(x+\Delta x) \simeq f\,(x) + \frac{df}{dx}\,\Delta x \tag{1.21}$$

appelée développement limité, ou développement de Taylor, au premier ordre en Δx de la fonction $f(x + \Delta x)$ autour de x.

1.3 Calcul vectoriel

A présent, on va introduire les outils de géométrie vectorielle dont on a besoin pour faire de la mécanique. Les grandeurs cinématiques comme la position, la vitesse et l'accélération sont des grandeurs vectorielles, car elles sont caractérisées par une norme et une orientation spatiale. Il y a deux moyens de multiplier des vecteurs ; soit on obtient un scalaire soit un autre vecteur. Le premier produit s'appelle un produit scalaire et le second un produit vectoriel.

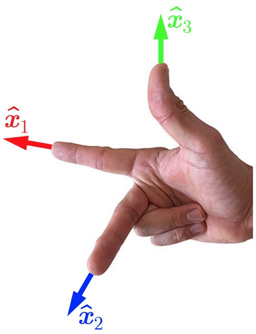
Le produit vectoriel a été introduit par Josiah Willard Gibbs afin de pouvoir décrire les rotations dans le cadre d'un espace vectoriel. L'espace vectoriel n'est pas nécessairement le cadre mathématique le plus adapté pour l'étude de la cinématique et de la dynamique. On pourrait aussi l'étudier dans le cadre de l'algèbre géométrique qui permet de mieux visualiser les phénomènes mais présente le désavantage d'être moins répandu et parfois plus ardu et subtil pour les manipulations algébriques. Cependant, ici on va se restreindre à l'espace vectoriel.



Josiah Willard Gibbs

1.3.1 Repère direct

Dans la pratique, on a souvent besoin d'exprimer un vecteur en termes de ses composantes projetées dans un repère. Dans l'espace, un ***repère*** est une entité géométrique constituée de trois vecteurs non-nuls et non-colinéaires attachés à un point. Un repère est orthonormé si les trois vecteurs sont orthogonaux et de norme unité. Ces vecteurs n'ont pas de dimension physique. Un repère orthonormé est un ***repère direct*** s'il satisfait la règle de la main droite, c'est-à-dire que si le premier vecteur est orienté selon l'index de la main droite et que le deuxième vecteur est orienté selon le majeur de la main droite alors le troisième vecteur est orienté selon le pouce de la main droite. Cette orientation particulière s'appelle la chiralité *dextrogyre*. Le choix de la main est une convention historique. On aurait tout aussi bien pu choisir la règle opposée de la main gauche obtenue par image miroir. Un repère qui satisfait la règle de la main gauche est un repère indirect. Dans ce cours, on considérera que des repères directs. Les repères peuvent être fixes ou mobiles suivant que leurs points d'attache et leur orientation changent ou non.



Règle de la main droite

Les scalaires sont des nombres, les vecteurs sont des éléments de droite définis par une norme et une orientation et les tenseurs – de rang 2 – sont des applications linéaires qui envoient des vecteurs sur d'autres vecteurs. Il est donc utile de les distinguer. Dans ce cours, on adoptera la convention de notation usuelle en mécanique et en physique qui consiste à écrire les scalaires en police normale, les vecteurs en **gras** et les tenseurs en sans-serif.

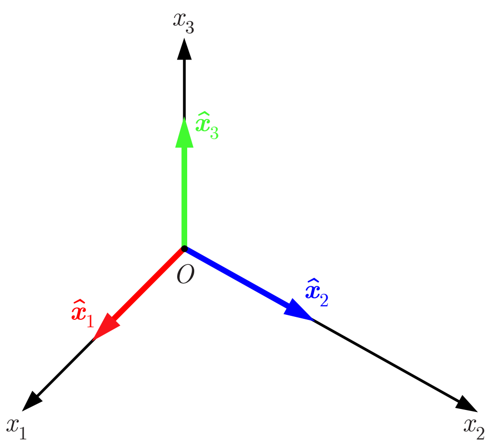
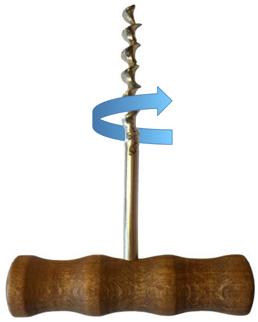


FIGURE 1.4 Repère cartésien direct $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$.

Un repère cartésien direct s'écrit mathématiquement comme $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$ où $\hat{\boldsymbol{x}}_1$, $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ et $\hat{\boldsymbol{x}}_3$ sont les vecteurs de base fixes, de norme unité et orthogonaux entre eux. Ces vecteurs satisfont la ***règle de la main droite*** (Fig. 1.4).

Une convention équivalente consiste à considérer la ***règle du tire-bouchon***. Si le mouvement de rotation s'effectue dans un plan du vecteur $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ vers le vecteur $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ alors le tire-bouchon s'enfonce dans la direction définie par le vecteur $\hat{\boldsymbol{x}}_3$.


Règle du tire-bouchon

1.3.2 Produit scalaire

Le ***produit scalaire*** de deux vecteurs est un scalaire obtenu par produit symétrique des coordonnées identiques de ces vecteurs exprimées par rapport à un repère direct. On considère deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ exprimés comme combinaisons linéaires des vecteurs de base du repère cartésien direct $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + a_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + a_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 \\ \boldsymbol{b} &= b_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + b_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + b_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 \end{aligned} \tag{1.22}$$

où (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) sont les coordonnées cartésiennes de ces vecteurs. Le produit scalaire entre les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ s'écrit,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 \tag{1.23}$$

ce qui implique que le produit scalaire est commutatif, c'est-à-dire qu'on peut échanger l'ordre des vecteurs sans changer l'expression du produit scalaire,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \tag{1.24}$$

En substituant les expressions (1.22) des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, exprimés comme combinaisons linéaires des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{x}}_1$, $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ et $\hat{\boldsymbol{x}}_3$ du repère cartésien, dans la définition (1.23) du produit scalaire, on conclut que le produit scalaire des vecteurs de base est de la forme suivante,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{x}}_j = \delta_{ij} \qquad \forall\ i,j = 1,2,3 \tag{1.25}$$

où le symbole de Kronecker est un scalaire défini comme

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \tag{1.26}$$

Afin d'établir quelques propriétés importantes du produit scalaire, on peut considérer en toute généralité que les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ont la même origine. Le vecteur $\boldsymbol{a}$ peut s'écrire comme la somme vectorielle d'un vecteur $\boldsymbol{a}_\parallel$ parallèle au vecteur $\boldsymbol{b}$ et d'un vecteur $\boldsymbol{a}_\perp$ perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\parallel + \boldsymbol{a}_\perp \tag{1.27}$$

On oriente le repère cartésien $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$ tel que le vecteur $\boldsymbol{b}$ est colinéaire au vecteur $\hat{\boldsymbol{x}}_2$, le vecteur $\boldsymbol{a}$ est dans le plan engendré par les vecteurs $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ et $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ et l'orientation du vecteur $\hat{\boldsymbol{x}}_3$ est définie par la règle de la main droite. On prend l'origine O à l'intersection entre les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. On dénote θ l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, et $\|\boldsymbol{a}\|$ et $\|\boldsymbol{b}\|$ leurs normes (Fig. 1.5). Dans le repère cartésien, les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ s'écrivent,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \|\boldsymbol{a}\|\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \|\boldsymbol{a}\|\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ \boldsymbol{b} &= \|\boldsymbol{b}\|\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \end{aligned} \tag{1.28}$$

La définition (1.25) du produit scalaire des vecteurs de base implique alors que,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta \tag{1.29}$$

Les parties parallèle et perpendiculaire du vecteur $\boldsymbol{a}$ s'écrivent,

$$\boldsymbol{a}_\parallel = \|\boldsymbol{a}\|\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{a}_\perp = \|\boldsymbol{a}\|\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 \tag{1.30}$$

On tire alors les trois propriétés suivantes,

$$(i)\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2 \qquad (ii)\quad \boldsymbol{a}_\parallel\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \qquad (iii)\quad \boldsymbol{a}_\perp\cdot\boldsymbol{b} = 0 \tag{1.31}$$

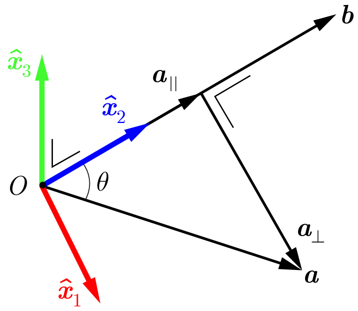


FIGURE 1.5 Produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

1.3.3 Produit vectoriel

Le ***produit vectoriel*** de deux vecteurs est un vecteur obtenu par produit antisymétrique des coordonnées cartésiennes différentes de ces vecteurs et d'un autre vecteur de base du repère cartésien direct $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$. Le produit vectoriel entre les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ s'écrit,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2\, b_3 - a_3\, b_2)\, \hat{\boldsymbol{x}}_1 + (a_3\, b_1 - a_1\, b_3)\, \hat{\boldsymbol{x}}_2 + (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\, \hat{\boldsymbol{x}}_3 \tag{1.32}$$

Cela implique que le produit vectoriel est anticommutatif, c'est-à-dire qu'en échangeant l'ordre des vecteurs on change son signe,

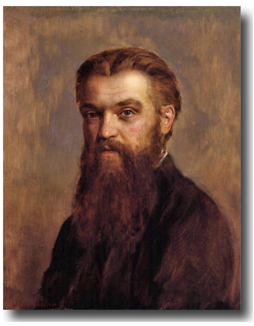
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{1.33}$$

En substituant les expressions (1.22) des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, exprimés comme combinaisons linéaires des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{x}}_1$, $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ et $\hat{\boldsymbol{x}}_3$ du repère cartésien, dans la définition (1.32) du produit vectoriel, on conclut que le produit vectoriel des vecteurs de base est de la forme suivante,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i \times \hat{\boldsymbol{x}}_j = \varepsilon_{ijk}\, \hat{\boldsymbol{x}}_k \qquad \forall\ i, j, k = 1, 2, 3 \tag{1.34}$$

où les composantes du tenseur complètement antisymétrique de Levi-Civita sont des scalaires définis comme

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \ \ 1 & \text{pour} \quad \varepsilon_{123}\,, \quad \varepsilon_{231}\,, \quad \varepsilon_{312} \\ -1 & \text{pour} \quad \varepsilon_{321}\,, \quad \varepsilon_{213}\,, \quad \varepsilon_{132} \\ \ \ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.35}$$



William Kingdon Clifford

Par conséquent, $\hat{\boldsymbol{x}}_i \times \hat{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{0}$ pour tout $i = 1, 2, 3$. De nombreux auteurs utilisent le symbole $\wedge$ au lieu du symbole $\times$ pour représenter le produit vectoriel. On ne va pas adopter cette convention ici étant donné que le symbole $\wedge$ est réservé au produit extérieur d'une algèbre géométrique, aussi appelée algèbre de Clifford, alors que le produit vectoriel est défini dans le cadre d'un espace vectoriel. Le produit extérieur est associatif alors que le produit vectoriel ne l'est pas. En effet, la définition (1.32) appliquée aux produits vectoriels des trois vecteurs implique que,

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \tag{1.36}$$

Le produit vectoriel peut être défini uniquement dans un espace à trois dimensions. Afin d'établir quelques propriétés importantes du produit vectoriel, on peut considérer en toute généralité que les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ont la même origine. On oriente le repère cartésien $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$ tel que le vecteur $\boldsymbol{b}$ est colinéaire au vecteur $\hat{\boldsymbol{x}}_2$, le vecteur $\boldsymbol{a}$ est dans le plan engendré par les vecteurs $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ et $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ et l'orientation du vecteur $\hat{\boldsymbol{x}}_3$ est définie par la règle de la main droite. On prend l'origine O à l'intersection entre les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. On dénote θ l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, et $\|\boldsymbol{a}\|$ et $\|\boldsymbol{b}\|$ leurs normes (Fig. 1.6).

Compte tenu des expressions (1.28) des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ dans le repère cartésien, la définition (1.34) du produit vectoriel des vecteurs de base implique alors que,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\, \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{x}}_3 \tag{1.37}$$

où l'angle θ est aigu. L'interprétation géométrique de l'équation (1.37) est que la norme du

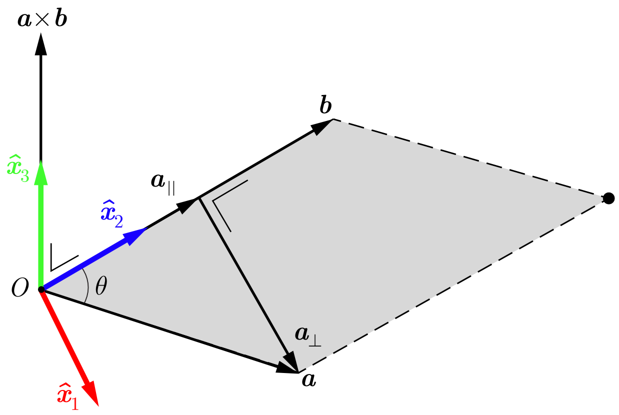


FIGURE 1.6 Produit vectoriel des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

produit vectoriel de deux vecteurs correspond à la surface du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs et que son orientation est orthogonale à cette surface. Les coordonnées cartésiennes des vecteurs $\boldsymbol{a}_{\parallel}$ et $\boldsymbol{a}_{\perp}$ sont respectivement $(0, \|\boldsymbol{a}\|\cos\theta, 0)$ et $(\|\boldsymbol{a}\|\sin\theta, 0, 0)$. Compte tenu des relations (1.30), on tire alors les trois propriétés suivantes,

$$(i) \quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad (ii) \quad \boldsymbol{a}_{\parallel}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \qquad (iii) \quad \boldsymbol{a}_{\perp}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{1.38}$$

1.3.4 Produit mixte

On considère trois vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ exprimés comme combinaisons linéaires des vecteurs de base du repère cartésien direct $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= a_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + a_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + a_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3\\
\boldsymbol{b} &= b_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + b_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + b_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3\\
\boldsymbol{c} &= c_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + c_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + c_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3
\end{aligned} \tag{1.39}$$

où (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) et (c_1, c_2, c_3) sont les coordonnées cartésiennes de ces vecteurs. En prenant le produit scalaire du vecteur obtenu par produit vectoriel des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ et du vecteur $\boldsymbol{c}$, on obtient le ***produit mixte***,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (a_2\,b_3 - a_3\,b_2)\,c_1 + (a_3\,b_1 - a_1\,b_3)\,c_2 + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,c_3 \tag{1.40}$$

De la définition (1.40) du produit mixte, on tire alors les deux propriétés suivantes,

$$(i) \quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} \qquad (ii) \quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = 0 \tag{1.41}$$

La propriété (i) est une conséquence du fait que ces trois produits mixtes représentent le volume du prisme engendré par les vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$, et la propriété (ii) est une conséquence du fait que le volume d'un prisme de hauteur nulle est nul.

1.3.5 Identité vectorielle

A présent, on va établir une identité vectorielle très importante pour la suite de ce cours. A l'aide de la définition du produit vectoriel (1.32), on montre que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = &\Big(a_2\,(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3\,(b_3c_1 - b_1c_3)\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_1\\
&+ \Big(a_3\,(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1\,(b_1c_2 - b_2c_1)\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_2\\
&+ \Big(a_1\,(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2\,(b_2c_3 - b_3c_2)\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_3
\end{aligned} \tag{1.42}$$

De plus, à l'aide de la définition du produit scalaire (1.23), on montre également que

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{c} = &\Big(\left(\cancel{a_1c_1}+a_2c_2+a_3c_3\right)b_1-\left(\cancel{a_1b_1}+a_2b_2+a_3b_3\right)c_1\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_1\\ &+\Big(\left(a_1c_1+\cancel{a_2c_2}+a_3c_3\right)b_2-\left(a_1b_1+\cancel{a_2b_2}+a_3b_3\right)c_2\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_2\\ &+\Big(\left(a_1c_1+a_2c_2+\cancel{a_3c_3}\right)b_3-\left(a_1b_1+a_2b_2+\cancel{a_3b_3}\right)c_3\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_3\end{aligned}\tag{1.43}$$

En identifiant les équations (1.42) et (1.43) après simplification, on obtient l'identité vectorielle,

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{c}\tag{1.44}$$